1. Considera la función f definida por $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

   Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ (1 punto).

   Prueba también que $f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z \in D(0,1)$ (1 punto).

   El lema de Abel permite sustituir en la igualdad anterior $z = i$. Hazlo para obtener la suma de la serie $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (1,5 puntos).

2. Sea f una función holomorfa en el disco unidad $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para todo w con $|w| = 1$ se tenga $\lim_{z \to w} f(z) = \infty$.

   Prueba que f sólo puede tener un número finito de ceros en $D(0,1)$ (1,5 puntos).

   Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ los ceros de f en $D(0,1)$ con multiplicidades $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

   Justifica que puede definirse la función

   $$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}\cdots(z-a_k)^{n_k}}$$

   de forma apropiada en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ para que dicha función sea holomorfa en $D(0,1)$. Justifica que para todo w con $|w| = 1$ se verifica que $\lim_{z \to w} g(z) = \infty$ (1,5 puntos).

   Justifica que la función g no se anula en $D(0,1)$ por lo que la función $h(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ es holomorfa en $D(0,1)$. Extiende de forma apropiada la función h al disco unidad cerrado para concluir, usando el principio del módulo mínimo y del módulo máximo, que la existencia de la función f es imposible (1,5 puntos).

Teoría: Teorema de la aplicación abierta (2 puntos).
Para aprobar debes conseguir 5 puntos.